34 代數整數與整係數質多項式

一個複數α稱為代數整數是指：可以找到一個首項係數為 1，而且其它係數都是整數的多項式

$$\begin{cases} f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \\ \text{其中}\, a_{n-1},\cdots,a_1,a_0 \,\text{為整數} \end{cases}$$

滿足 $f(\alpha)=0$。使得上述條件成立的最低次多項式（首項係數限為 1）$f(x)$用符號$M_\alpha(x)$表示，並稱此為α的最小多項式。例如：$\alpha=\sqrt{2}$時，因為$\sqrt{2}^2-2=0$，所以

$$M_{\sqrt{2}}(x)=x^2-2.$$

定理 34.1　若$M_\alpha(x)$是代數整數α的最小多項式則

(1) $M_\alpha(x)$是整係數質多項式。

(2) 若整係數多項式 $f(x)$滿足

$$f(\alpha)=0$$

則$M_\alpha(x)$整除 $f(x)$。

【證明】

(1) 利用反證法，假設$M_\alpha(x)$不是質多項式，則可令

$$M_\alpha(x)=g(x)h(x)$$

其中$g(x),h(x)$的次數不為零。由

$$M_\alpha(\alpha)=g(\alpha)h(\alpha)=0 \Rightarrow g(\alpha)=0 \text{ 或 } h(\alpha)=0.$$

這與$M_\alpha(x)$是最小的整係數多項式矛盾。因此$M_\alpha(x)$是整係數質多項式。

(2) 設 $f(x)$被$M_\alpha(x)$除之，餘式為$r(x)$，商是$q(x)$，則我們得到

$$f(x)=M_\alpha(x)q(x)+r(x),$$

其中 $\deg r(x)<\deg M_\alpha(x)$ 或者 $r(x)$ 是零多項式。由此得到

$$\begin{aligned}0=f(\alpha)=M_\alpha(\alpha)q(\alpha)+r(\alpha)&\Rightarrow r(\alpha)=0\\&\Rightarrow r(x)=0\ \text{(零多項式)}\\&\Rightarrow M_\alpha(x)\mid f(x).\end{aligned}$$

例題 34.1 假設實數

$$\alpha=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}.$$

試證 α 是一個代數整數，並求最小多項式 $M_\alpha(x)$。

【證明】由立方差的公式

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

得到

$$\sqrt[3]{4}^3-\sqrt[3]{2}^3=(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})\left(\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)^2+3\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}\right).$$

因此 α 是方程式

$$x^3+6x-2=0$$

的一個根。又根據一次因式檢驗法（或者第 29 節艾森斯坦判別法）知道 x^3+6x-2 是一個質多項式，所以最小多項式

$$M_\alpha(x)=x^3+6x-2.$$

設

$$r=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}.$$

由棣莫弗定理知道

$$r^7=1\Rightarrow(r-1)(r^6+r^5+r^4+r^3+r^2+r+1)=0.$$

因為 $r\neq1$，所以

$$r^6+r^5+r^4+r^3+r^2+r+1=0.$$

設

$$\begin{cases}\alpha=r+r^6=2\cos\dfrac{2\pi}{7},\\ \beta=r^2+r^5=2\cos\dfrac{4\pi}{7},\\ \gamma=r^3+r^4=2\cos\dfrac{6\pi}{7},\\ p=r+r^2+r^4,\\ q=r^3+r^5+r^6.\end{cases}$$

例題 34.2　試完成下列問題：

(1) 試求以實數α,β,γ為三根的三次方程式。

(2) 求$M_{2\cos\frac{2\pi}{7}}(x)$。

(3) 試求以複數p,q為兩根的一元二次方程式。

(4) [1963 IMO] 證明：

$$\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{1}{2},\\ \sin\dfrac{2\pi}{7}+\sin\dfrac{4\pi}{7}-\sin\dfrac{6\pi}{7}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}.\end{cases}$$

【證明】

(1) 因為

$$\alpha+\beta+\gamma=r^6+r^5+r^4+r^3+r^2+r=-1,$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2(r^6+r^5+r^4+r^3+r^2+r)=-2,$$
$$\alpha\beta\gamma=r^6+r^5+r^4+r^3+r^2+r+2=1,$$

所以三次方程式為$x^3+x^2-2x-1=0$。

(2) 因為x^3+x^2-2x-1是一個質多項式，所以

$$M_{2\cos\frac{2\pi}{7}}(x)=x^3+x^2-2x-1.$$

(3) 因為

$$\begin{aligned} p+q&=r^6+r^5+r^4+r^3+r^2+r=-1,\\ pq&=r^6+r^5+r^4+r^3+r^2+r+3=2,\end{aligned}$$

所以二次方程式為 $x^2+x+2=0$。

(4) 由 $x^2+x+2=0$ 的公式解知道：

$$\{p,q\}=\left\{\frac{-1+\sqrt{7}i}{2},\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}\right\}.$$

因為

$$\begin{aligned} p&=r+r^2+r^4\\ &=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\right)i\\ &=-\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{6\pi}{7}\right)i\\ &=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i,\end{aligned}$$

所以(4)成立。

習題 34.1　試

(1) 求 $M_{\sqrt{3}+\sqrt{5}}(x)$。

(2) 證：若 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 是方程式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

的一個根，其中 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_0$ 是整數，則證明

$$11\,|\,(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n).$$

習題 34.2　設$\alpha=\cos 20^{\circ}+i\sin 20^{\circ}$。試證$\alpha$是一個代數整數，並求最小多項式$M_{\alpha}(x)$。

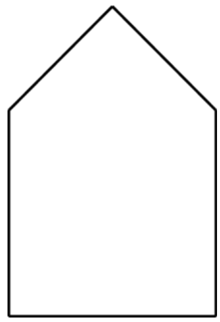
習題 34.3　試求三次方程式

$$x^{3}-3x+1=0$$

的根。

動手玩數學

下圖是一個房子形的蛋糕，底部與兩邊的長度是 2 單位，而屋頂的斜長為$\sqrt{2}$單位。蛋糕師父想將此蛋糕切兩刀之後變成三塊，而此三塊恰可拼成一個等腰直角三角形蛋糕。你能幫蛋糕師父解決他的煩惱嗎？



挑戰題

設

$$r=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$$

且令

$$\begin{cases}\alpha=r+r^{2}+r^{4}+r^{8}+r^{9}+r^{13}+r^{15}+r^{16},\\ \beta=r^{3}+r^{5}+r^{6}+r^{7}+r^{10}+r^{11}+r^{12}+r^{14}.\end{cases}$$

(1) 試求以α,β為兩根的一元二次方程式。

(2) 試求α,β的值。

(3) 試求α_1,α_2的值，其中

$$\begin{cases}\alpha_1 = r + r^4 + r^{13} + r^{16},\\ \alpha_2 = r^2 + r^8 + r^9 + r^{15}.\end{cases}$$

(4) 試求β_1,β_2的值，其中

$$\begin{cases}\beta_1 = r^3 + r^5 + r^{12} + r^{14},\\ \beta_2 = r^6 + r^7 + r^{10} + r^{11}.\end{cases}$$

(5) 試求$x = r + r^{16} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$的值。

高斯證明正十七邊形可以尺規作圖

$$2\cos\frac{2\pi}{17}$$

$$\|$$

$$\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8} + \frac{\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}}{8}$$

尺規作圖問題

與代數整數相關的問題有相當古老的尺規作圖問題。所謂尺規作圖問題是指去判別一個複數（常常是實數），在僅給定“沒有刻度的直尺、圓規及單位長度”的情形下：是否可在平面上作出此複數來。如果此數可作出來則稱此數為可尺規作圖的數。至於那些數是可尺規作圖的數，一直是很難的問題。直到十九世紀的初期，數學家才得到完整的瞭解。例如若代數整數α是個可尺規作圖的數則α的最小多項式的次數必需是 2 的某次方才行；因此像

$$\sqrt[3]{2},\sqrt[5]{3},\cos 20^{\circ}+i\sin 20^{\circ},\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$$

等此三數都是不可尺規作圖的數。由 $\cos 20^{\circ}+i\sin 20^{\circ}$ 是一個不可尺規作圖的數得到角 60° 是不可被三等分的。這解決了古代作圖題的三大難題之一的三等分角問題。也就是說：給定任意的一個角，我們不見得能把它給三等分，只有在很特殊的角的情形才能夠辦到（例如：當 n 是 3 的倍數時，則 n° 角是可尺規作圖的；也就是說，9 的倍數的整數角是可以三等分的）。